УДК 62.50

ЛЕ ЧАН ТХАНГ

СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ

В данной работе основное внимание уделяется проблеме построения управления в критической области, где нельзя определять управление так же, как в остальных некритических областях. В целом в работе получен интересный теоретический результат, который позволяет предложить новый тип регуляторов для нелинейных объектов управления. Этот регулятор называется нелинейным регулятором переменной структуры.

***Ключевые слова**: нелинейный регулятор, управление, критическая область.*

Введение. На практике часто встречаются нелинейные объекты управления. Синтез нелинейных регуляторов для таких объектов всегда затруднителен, так как отсутствует достаточно эффективный метод в общем случае [1, 2]. Для решения этой проблемы нами предложен метод синтеза нелинейных регуляторов с переменной структурой закона управления [3, 4].

В теории управления известны регуляторы переменной структуры, в которых коммутируются линейные блоки [5]. Эти регуляторы строятся на основе фазовых портретов блоков, поэтому в них обычно коммутируются линейные блоки второго порядка. Это обусловливает узкие возможности подобных регуляторов, в особенности для синтеза систем управления нелинейными объектами.

Предложенный в [3, 4] метод синтеза характеризуется тем, что коммутируются нелинейные законы управления. Поэтому соответствующие регуляторы называются нелинейными регуляторами переменной структуры (НРПС). Синтез коммутируемых нелинейных законов управления ведется на основе функции Ляпунова, что значительно расширяет возможности управления нелинейными объектами. Алгоритм НРПС является достаточно сложным, но он легко реализуется на промышленных микроконтроллерах. Таким образом, метод, предложенный в [3, 4], позволяет использовать широкие возможность современной вычислительной техники.

Постановка задачи: построение алгоритма нелинейных регуляторов переменной структуры в критической области. Рассмотрим объект управления, который описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x, u_f), \tag{1}$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния; u_f – скалярное управляющее воздействие; $F(x, u_f)$ – нелинейная дифференцируемая вектор-функция, $F(0, 0) = 0$.

Задача синтеза нелинейного регулятора для объекта (1) заключается в определении управления $u_f = u_f(x)$, т.е. в определении такой нелинейной обратной связи, чтобы положение равновесия $x = 0$ являлось устойчивым в смысле Ляпунова в целом [2].

Решение. Предполагается, что нелинейность системы (1) удовлетворяет условию

$$\frac{\partial^i F(x,u_f)}{\partial u_f^i} = 0 \quad \text{при} \quad i \geq 2, \tag{2}$$

тогда эту систему можно представить [3] следующим образом:

$$\dot{x} = A_1 x + f(x) + b(x) u_f, \tag{3}$$

где A_1 – постоянная матрица линейного приближения вектор-функции $F(x, 0)$ в точке $x = 0$; $f(x)$ – некоторая нелинейная вектор-функция. Подчеркнем, что уравнение (3) является точным представлением уравнения (1) при условии (2).

Если A_1 имеет собственное число с положительной вещественной частью, то полагаем $u_f = u + u_1$, где u, u_1 – новые управления. Предположим, что пара $A_1, b(x)$ вполне управляема при всех $x \in R^n$ и что существует управление $u_1 = K(x)x$ такое, что постоянная матрица $A = A_1 + b(x)K(x)$ имеет все собственные числа с отрицательными вещественными частями. При таком управлении u_1 система (3) принимает вид

$$\dot{x} = Ax + f(x) + b(x)u. \tag{4}$$

Изложенное позволяет считать, что постоянная матрица A обеспечивает асимптотическую устойчивость линейной части (4). В этом случае существует положительно определенная симметрическая матрица P, которая является решением уравнения Ляпунова: $A^T P + PA = -C$, где C – положительно определенная матрица [2]. Возьмем в качестве кандидата в функции Ляпунова для системы (4) положительно определенную квадратичную форму

$$V(x) = x^T P x \tag{5}$$

и найдем её производную по времени вдоль траекторий системы (4):

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} =$$
$$= -x^T Cx + 2[x^T Pf(x) + x^T P b(x) u]. \tag{6}$$

В соответствии с известной теоремой Ляпунова [2, 5], для обеспечения асимптотической устойчивости положения равновесия $x = 0$ системы (4) необходимо выбрать управление $u = u(x)$ так, чтобы $\dot{V}(x) < 0$ на траекториях этой системы.

Пусть ε , ε_1 - малые положительные числа. Тогда, в соответствии с работами [3, 4], алгоритм НРПС включает следующие частичные законы управления:

1. Если при некоторых $x \in R^n$, $\| x \| < \varepsilon_1$ имеет место неравенство $x^T Pf(x) < \alpha\, x^T C x$ и $\alpha \in [0, 0{,}5)$, то $u(x) = 0$, т.е.

$$u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x^T Pf(x) < \alpha\, x^T C x \quad \text{или} \quad \| x \| < \varepsilon_1. \tag{7}$$

При этом согласно (6)

$$\dot{V}(x) = -x^T Cx + 2x^T Pf(x) < -x^T Cx + 2\alpha\, x^T Cx < 0,$$

т.е. является отрицательно определенной функцией.

2. Если $x^T Pf(x) \geq \alpha\, x^T C x$, $\alpha \in [0, 0{,}5)$, $\| x \| \geq \varepsilon_1$ и выполняется условие $| x^T P b(x) | \geq \varepsilon$, то

$$u(x) = -x^T Pf(x) / x^T Pb(x). \quad (8)$$

В этом случае согласно (6) производная $\dot{V}(x) = -x^T C, \ x$ <0 так же.

Если же $|x^T Pb(x)| < \varepsilon$, то управление, определённое по (8), может принимать недопустимо большие значения. Поэтому необходимо найти новое управление в этой области.

С учетом соотношения (7) предлагается следующее определение критической области: область $\Omega_{KP} \in R^n$ называется критической, если при $x\Omega_{KP}$ выполняются условия:

$$\|x\| \geq \varepsilon_1, \ x^T Pf(x) \geq \alpha x^T Cx, \ |x^T Pb(x)| < \varepsilon . \quad (9)$$

Перейдем к формированию управления в критической области.

В дальнейшем предполагается цифровая реализация НРПС, поэтому далее все непрерывные величины заменяются их дискретными значениями: $t \to t_k$, $x(t) \to x_k$, $u(x) \to u_k$. При этом период квантования по времени Δt предполагается достаточно малым, так что $x(t) \approx x(k\Delta t) = x(t_k) = x_k$ при всех $t \in [k\Delta t, \ (k+1)\Delta t)$; $k = 1, 2, \cdots$.

Пусть в момент времени t_{k-1} траектория системы (4) пришла в точку x_{k-1}, которая находится вне области Ω_{KP} (9). В этой точке, согласно (8), управление u_{k-1} определяется по формуле

$$u_{k-1} = -x_{k-1}^T Pf(x_{k-1}) / x_{k-1}^T Pb(x_{k-1}). \quad (10)$$

Предположим также, что в следующий момент времени $t_k = t_{k-1} + \Delta t$ траектория системы (4) под действием управления (10) попадает внутрь области Ω_{KP}.

Будем искать управление u_k такое, чтобы производная $\dot{V}(x_k) < 0$, т.е. такое, при котором значение функции Ляпунова в следующий момент времени t_{k+1} было меньше, чем её значение в момент времени t_k. Другими словами, при искомом управлении u_k должно выполняться неравенство

$$x_{k+1}^T P x_{k+1} < x_k^T P x_k . \quad (11)$$

Учитывая малое значение Δt, примем, что

$$x_{k+1} = x_k + \dot{x}_k \Delta t, \text{ где } \dot{x}_k = Ax_k + f(x_k) + b(x_k)u_k . \quad (12)$$

Поставим x_{k+1} из первого равенства (12) в (11). В результате будем иметь

$$(x_k + \dot{x}_k \Delta t)P(x_k + \dot{x}_k \Delta t) < x_k P x_k$$

$$\Leftrightarrow \quad x_k^T P x_k + x_k^T P \dot{x}_k \Delta t + \Delta t \dot{x}_k^T P x_k + \Delta t \dot{x}_k^T P \dot{x}_k \Delta t < x_k^T P x_k$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\Delta t x_k^T P \dot{x}_k + \Delta t^2 \dot{x}_k^T P \dot{x}_k < 0 .$$

Сократив обе части последнего неравенства на Δt, получим

$$2x_k^T P \dot{x}_k + \Delta t \dot{x}_k^T P \dot{x}_k < 0 . \quad (13)$$

Далее подставим $\dot{x}_k$ из второго равенства (12) в (13). В результате получим (для большей наглядности выкладок $b(x_k)$ далее заменено на b)

$$2x_k^T P[Ax_k + f(x_k) + bu_k] +$$
$$+ \Delta t[Ax_k + f(x_k) + bu_k]^T P[Ax_k + f(x_k) + bu_k] < 0.$$

Это неравенство эквивалентно следующему неравенству второго порядка по u_k :

$$\Delta t b^T Pb(u_k)^2 + 2\{\Delta t[Ax_k + f(x_k)]^T Pb + x_k^T Pb\}u_k +$$
$$+ \{2x_k^T + \Delta t[Ax_k + f(x_k)]^T\}P[Ax_k + f(x_k)] < 0. \quad (14)$$

Для того чтобы существовало управление u_k , необходимо и достаточно, чтобы неравенство (14) имело вещественное решение. Другими словами, его дискриминант $\Delta(x)$ должен быть положительным, т.е. необходимо, чтобы $\Delta(x) > 0$.

Учитывая структуру полинома в (14), имеем:

$$\begin{aligned} \Delta(x_k) = \{&\{[Ax_k + f(x_k)]^T Pb\}^2 - \\ &- b^T Pb[Ax_k + f(x_k)]^T P[Ax_k + f(x_k)]\}\Delta t^2 + \\ &+ 2\{[Ax_k + f(x_k)]^T Pb x_k^T Pb - \\ &- [Ax_k + f(x_k)]^T Px_k^T b^T Pb\}\Delta t + [x_k^T Pb]^2 > 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Отсюда следует, что искомое управление всегда существует при достаточно малом Δt .

При выполнении условия (15) из уравнения (14) находим

$$u^*_{1k,2k} = \frac{-\{\Delta t[Ax_k + f(x_k)]^T Pb + x_k^T Pb\} \pm \sqrt{\Delta(x_k)}}{\Delta t b^T Pb}.$$

Искомое управление u_k находится на интервале (u^*_{1k}, u^*_{2k}) , т.е.

$$u^*_{1k} < u_k < u^*_{2k},$$

Можно, например, полагать,

$$u_k = \frac{-\{\Delta t[Ax_k + f(x_k)]^T Pb + x_k^T Pb\} - \gamma\sqrt{\Delta(x_k)}}{\Delta t b^T Pb}, \quad 0 < \gamma < 1. \quad (16)$$

Таким образом, алгоритм выбора нелинейного управления $u(x)$ объектом (4) имеет следующий вид:

$$u(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x^T P f(x) < \alpha x^T C x \text{ или } \|x\| < \varepsilon_1; \\ -x^T P f(x) / x^T P b \text{ при } x^T P f(x) \ \alpha x^T C x \text{ и } \|x\| \ \varepsilon_1, \ |x^T P b| \ \varepsilon \\ \dfrac{-\{\Delta t[Ax + f(x)]^T Pb + x^T Pb\} - \gamma\sqrt{\Delta(x)}}{\Delta t b^T Pb}, \quad 0 < \gamma < 1 \text{ при} \\ x^T P f(x) < \alpha x^T C x, \|x\| \text{ и } \varepsilon_1 \quad |x^T P b| \ \varepsilon \end{cases} \quad (17)$$

Найденное управление (17) решает поставленную задачу, так как положение равновесия $x=0$ системы (4), (17) является устойчивым по Ляпунову в целом, в силу теоремы 4.1 из работы [2. С. 20].

Пример. В качестве примера синтеза НРПС возьмем задачу устранения хаотических колебаний в управляемой системе Рёсслера [1]. Указанная система Рёсслера определяется уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \alpha\, x_2, \\ \dot{x}_3 &= \beta + x_3(x_2 - c) + u_f. \end{aligned} \tag{18}$$

В данном случае $\alpha = 0{,}15;\ \beta = 0{,}2;\ c = 10$. Если представить систему (18) в виде (3), то соответствующие матрица, нелинейность и вектор будут иметь вид:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0{,}15 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix};\ f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_2x_3 \end{pmatrix};\ b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{при}\quad u_f = -0{,}2 + u_1 + u\,. \tag{19}$$

Матрица A_1 не обеспечивает асимптотическую устойчивость линейной части (18), поскольку имеет собственное число с положительной вещественной частью. Пара (A_1, b) вполне управляема. Возьмем управление

$$u_1(x) = 20{,}9725x_1 + 12{,}4959x_2 + 1{,}85x_3\,, \tag{20}$$

при котором матрица $A = A_1 + bu_1(x)$ из системы (4) принимает вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0{,}15 & 0 \\ 20{,}9725 & 12{,}4959 & -8{,}15 \end{pmatrix}.$$

Как будет показано ниже, положение равновесия нелинейной системы (19), (20) является неустойчивым, поэтому найдем стабилизирующее нелинейное управление $u = u(x)$. Переходя к его синтезу, примем значения параметров $\alpha = 0{,}3$, $\varepsilon = 0{,}1$, $\varepsilon_1 = 10^{-6}$, $\gamma = 0{,}99$, $\Delta t = 0{,}001$ и обозначим:

$$H(x) = x^T P f(x) = (-0{,}1359x_1 + 0{,}0034x_2 + 0{,}1394x_3)x_2x_3,$$

$$L(x) = 0{,}3x^T C x = 0{,}3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

$$I(x) = x^T Pb = -0{,}1359x_1 + 0{,}0034x_2 + 1{,}1394x_3,$$

$\Delta(x)$ – определяется по формуле (15).

Тогда по формуле (17), будем иметь

$$u(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad H(x) < L(x) \quad \text{или} \quad \|x\| < \varepsilon_1; \\ -H(x)/I(x) \quad \text{при} \quad H(x) \geq L(x), \quad \|x\| \geq \varepsilon_1 \ \text{и} \ |I(x)| \geq \varepsilon; \\ \dfrac{-\{\Delta t[Ax + f(x)]^T Pb + I(x)\} - 0{,}99\sqrt{\Delta(x)}}{\Delta t b^T Pb} \\ \qquad \text{при} \ H(x) \geq L(x), \ \|x\| \geq \varepsilon_1 \ \text{и} \ |I(x)| < \varepsilon. \end{cases} \quad (21)$$

Моделирование системы, заданной уравнениями (19), (20), (21), проводилось в среде Matlab. На рис.1-3 показаны результаты моделирования при начальных условиях $x_0 = [-16, -50, 70]^T$. На рис.1 представлены графики переменных системы (19) только с управлением u_1 (20). Как видно, переменные x_1, x_3 неограниченно возрастают, т.е. положение равновесия $x = 0$ системы, заданной уравнениями (19), (20), является неустойчивым.

На рис. 2 представлены графики переменных системы (17) с управлениями u_1 (20) и $u(x)$ (21). График соответствующего управления $u(x)$ показан на рис. 3,*а*. В этом случае, согласно рис. 2, переменные системы затухают, т.е. положение равновесия $x = 0$ система, заданная уравнениями (19), (20) и (21), является устойчивым по Ляпунову в целом.

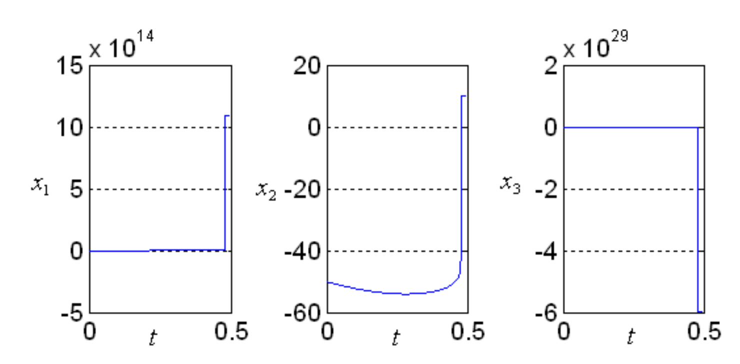


Рис. 1. Изменение переменных состояния системы, заданной уравнениями (19), (20)

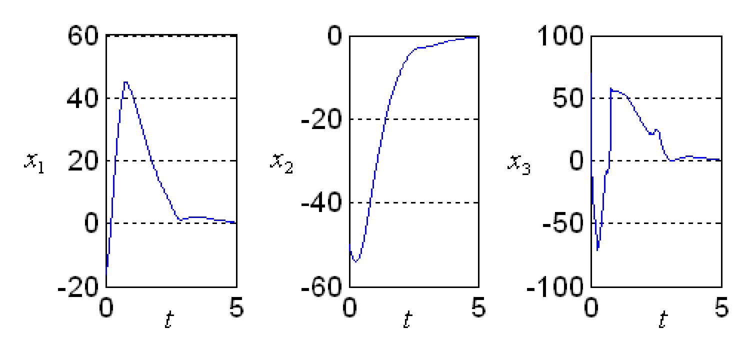


Рис. 2. Изменение переменных состояния системы,

заданной уравнениями (19), (20) и (21)

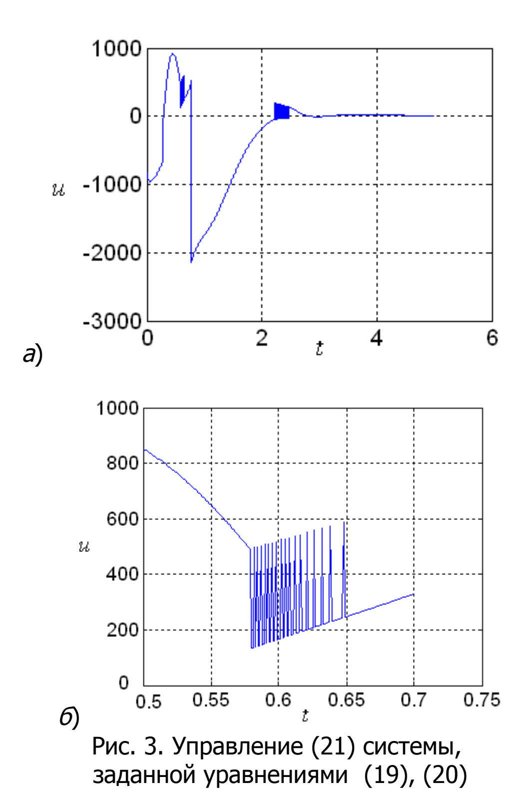
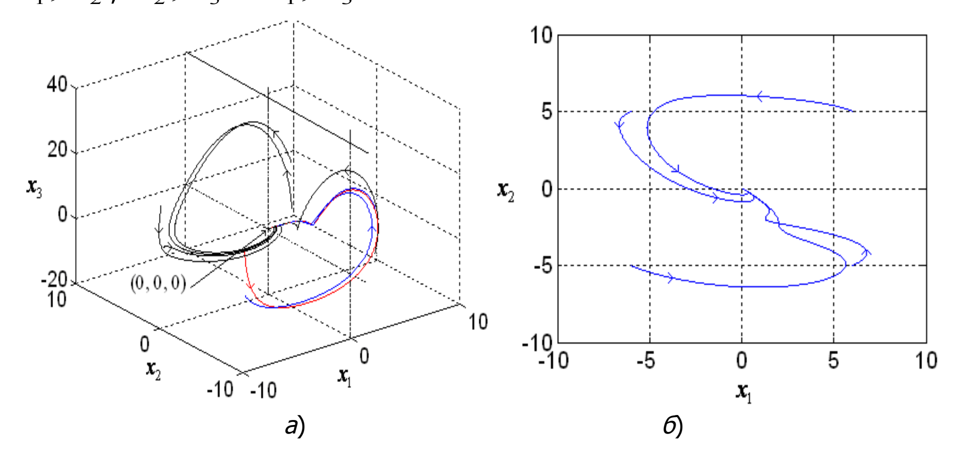


Рис. 3. Управление (21) системы, заданной уравнениями (19), (20)

На рис. 3,*б* показан график управления в увеличенном масштабе в интервале времени 0,5-0,7 с. Подчеркнем, что согласно рис. 2, несмотря на колебания управления, переменные состояния изменяются плавно.

На рис. 4,*а* дан портрет системы (19), (20), (21) в трехмерном пространстве, а на рис. 4,*б* - 4,*г* - проекции фазовых траекторий на плоскости x_1, x_2; x_2, x_3 и x_1, x_3 соответственно.



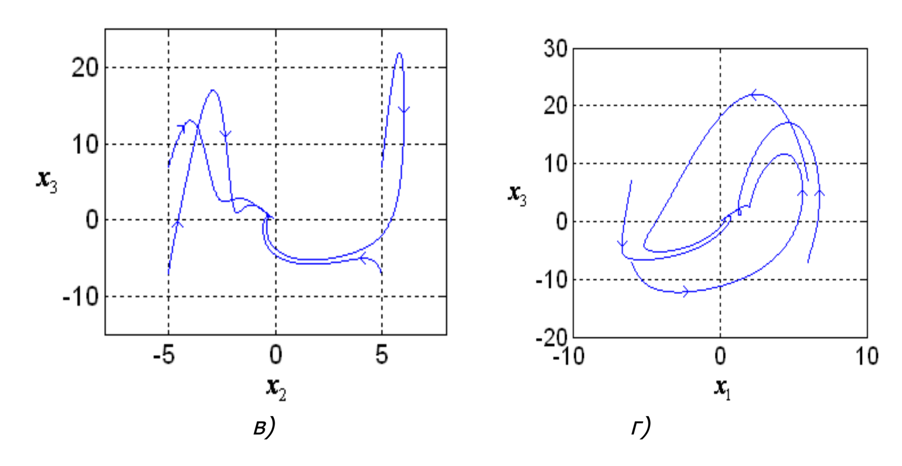


Рис. 4. Фазовый портрет и проекции

Из графиков видно, что управление (21) является ограниченным, а положение равновесия системы, заданной уравнениями (19), (20), (21), - устойчивым по Ляпунову.

Выводы. Предложенный алгоритм работы нелинейного регулятора переменной структуры обеспечивает эффективное управление нелинейными объектами, и может быть распространён на случай объектов с несколькими управлениями.

Библиографический список

1. *Кpaснощеченко В.И.* Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. / В.И.Краснощеченко, А.П.Крищенко. - М.: Изд-во МГТУ им Н.Э. Баумана. 2005.
2. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. / Е.А. Барбашин. - М.: Наука, 1967.
3. *Ле Ч.Т.* Управление каскадом гидроэлектростанций / Ч.Т.Ле // Известия ТРТУ. Тематический выпуск “Актуальные проблемы производства и потребления электроэнергии”. – Таганрог: Изд-во ТРТУ. 2006. №15. – С.24-32.
4. *Ле Ч.Т.,* Синтез нелинейных систем управления на основе функций Ляпунова / Ч.Т.Ле, А.Р.Гайдук // Известия ТРТУ. Специальный выпуск “Технические науки”. Материалы III научно-технической конференции профессорско-преподавательского состава, аспирантов и сотрудников ТРТУ. – Таганрог: Изд-во ТРТУ. 2006. №9(64). – С. 51-56.
5. *Гайдук А.Р.* Системы автоматического управления. Примеры, анализ и синтез / А.Р.Гайдук. - Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2006.

Материал поступил в редакцию 10.09.07.

LE TRAN THANG

SYNTHESIS OF NONLINEAR REGULATORS OF VARIABLE STRUCTURE

In the given work the basic attention is given a problem of construction of control in critical area where it is impossible to define control just as in other non critical areas. As a whole in work the interesting theoretical result which allows to offer new type of regulators for nonlinear objects of control is received. This regulator refers to as a nonlinear regulator of variable structure.

ЛЕ Чан Тханг (р. 1979), аспирант кафедры «САУ» ТТИ ЮФУ по специальности 05.13.01 «Системный анализ, управление и обработки информации». Окончил ДГТУ (2005) по специальности «Управление и информатика в технических системах».
Научные интересы: современные методы анализа, синтеза и реализации нелинейных систем автоматического управления, моделирование нелинейных систем на ЭВМ.
Автор пяти научных работ.